

对于图 9(a) 所示的二层框架在均匀温降作用下的弯矩响应问题来说, 其二层柱子的弯矩主要是由一层横梁两端的角位移所引起, 在明确了基本分析模型中横梁两端的角位移方向之后, 不难得到图中所示的弯矩图形. 结合运用极端形态界定法: 当二层横梁的弯曲刚度为无穷大时有 $M_4 = M_3/2$; 当二层横梁的弯曲刚度趋于零时则 M_4 也将趋向于零. 不难得到结论, 该框架二层柱子的柱端弯矩值应有 $\frac{M_3}{2} > M_4 > 0$.

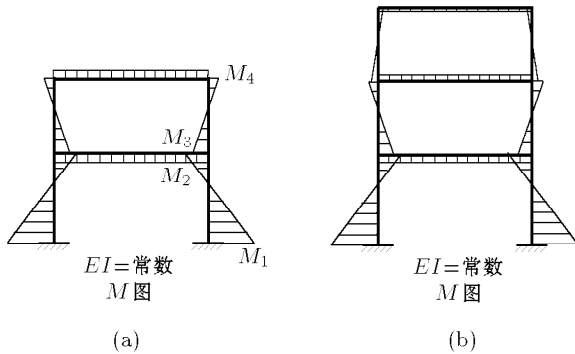


图 9

进一步运用延拓方法并结合运用极端形态界定法就不难得到图 2 所示三层框架在均匀温降作用下的弯矩响应如图 9(b) 所示. 由延拓法分析过程也可以得出结论: 多、高层框架结构在均匀温度变化作用下的弯矩响应应以框架底层最为显著, 而在二层以上其内力响应将迅速衰减. 这一结论所揭示的规律对于框架结构的设计具有实际意义.

多层框架有楼面均布荷载作用是一种常见的分析问题. 若是图 2 的三层框架在二层楼面作用有均布荷载, 仍可以单层门式刚架模型 (图 10(a)) 作为出发点, 再通过沿上、下两个方向的延拓完成概念力学分析. 图 10(b) 是基本分析模型的弯矩图形, 据此可知其对于相连的上、下部分所造成的动因

素, 即相连接点处的角位移及其方向. 结合运用概念力学分析的其它基本方法延拓分析, 便能快捷地获得上述三层框架的弯矩图形如图 10(c) 所示. 由延拓分析过程也可以看出, 楼面荷载对于多、高层框架的弯矩和剪力影响同样带有楼层局限性, 这也就是早期框架结构设计中常采用分层法计算的基础条件.

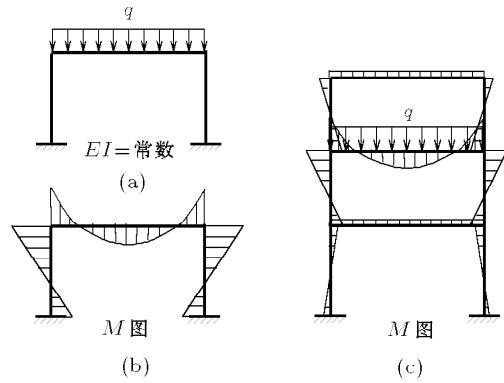


图 10

4 结 论

(1) 以一个基本的概念力学分析模型作为出发点的延拓分析方法对于许多实际工程问题来说十分有效, 可以作为概念力学分析中的一种新的基本方法.

(2) 延拓分析方法与概念力学分析的其他基本方法联合运用, 可以进一步发挥各种基本方法所蕴含的潜能, 从而解决许多较为复杂的实际工程问题的概念分析需要.

参 考 文 献

- 1 林同炎, 斯罗台斯伯利 SD. 结构概念和体系. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999
- 2 朱慈勉. 结构力学 (上、下册). 北京: 高等教育出版社, 2004

(责任编辑: 刘俊丽)

不可压平面无黏流动的弹性力学比拟¹⁾

马 昭²⁾ 蒋持平

(北京航空航天大学, 北京 100191)

摘要 构造了一个特殊的弹性力学平面问题比拟不可压平面无黏流动, 从而使这类流体力学问题可以采用固体力学软件 ANSYS 计算. 算例说明了比拟关系的正确性, 同时说明这样的比拟计算与直接使用流体力学软件 Fluent 计算相比, 可以得到更精确的结果.

关键词 比拟, Laplace 方程, 平面无黏流动, 纯剪切, 刚性

性夹杂

中图分类号: O351 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2011)04-063-03

比拟是科学研究和工程分析的重要方法. 流体力学软件 Fluent 计算不可压平面无黏流动的精度不高, 本文构造了一

本文于 2010-10-19 收到.

1) 北京航空航天大学大学生科研训练计划 (SRTP) 资助项目.

2) 马昭, 北京航空航天大学 2008 级本科生. E-mail: mz@sae.buaa.edu.cn

个特殊的弹性力学平面问题，由固体力学软件 ANSYS 进行比拟计算，改进了精度。

1 比拟关系

不可压平面位势流动的速度流函数 ψ ，满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -U_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中， U_i 表示 i 方向的速度，可用上述方程来求解不可压平面无黏流动问题。

上述控制方程是一个调和方程，能进行弹性力学问题比拟。无体力时，弹性力学平面问题在 x 方向用位移表示的平衡方程可写为

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

其中， u_i 表示 i 方向位移， ν 为泊松比，考虑一个特殊情形，即令 $\nu = 0$ ，再令 $u_y = 0$ 。取坐标变换

$$\left. \begin{aligned} X &= x \\ Y &= \sqrt{2}y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由方程 (2) 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial Y^2} &= 0 \\ \sigma_{xx} &= 2G \frac{\partial u_x}{\partial X}, \sigma_{xy} = \sqrt{2}G \frac{\partial u_x}{\partial Y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 σ_{ij} 表示 i 方向的 j 向应力分量， G 为剪切弹性模量。

方程 (1) 和 (4) 建立了不可压平面无黏流动与一个特殊弹性力学平面问题之间的比拟关系，见表 1。这样这类流体力学问题就可以采用固体力学软件 ANSYS 计算。需要注意，弹性力学比拟在 y 方向有一个伸缩因子 $\sqrt{2}$ 。

表 1 比拟关系

不可压平面无黏流动	弹性力学平面单向位移问题
ψ	u_x
U_x	$\sigma_{xy}/\sqrt{2}G$
$-U_y$	$\sigma_{xx}/2G$

2 算例与对照

首先选取不可压平面无黏流动中经典的圆柱绕流问题用作对照。设 U 为远场 x 方向均匀来流速度， a 为圆柱半径。此问题存在无穷域中的解析解

$$\left. \begin{aligned} \psi &= Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \\ U_x &= U \left[1 - \frac{a^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ U_y &= -\frac{2Ua^2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在数值模拟中，取图 1 所示 $40\text{ m} \times 30\text{ m}$ 长方形区域无黏圆柱绕流的计算模型，中心圆柱半径为 1 m ，左边均匀来流速度 $U = 1\text{ m/s}$ ，右边为出口，上下边及圆周均为滑移壁面，使用 Gambit 进行网格划分，三角形网格，网格数约为 150 000，使用 Fluent 进行计算。与此对应的弹性力学平面问题见图 2，根据方程 (3)，计算模型尺寸为 $40\text{ m} \times 15\sqrt{2}\text{ m}$ ，材料弹性模量 $E = 200\text{ GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0$ 。中心椭圆型刚性夹杂，半长轴 1 m ，半短轴 $\sqrt{2}/2\text{ m}$ 。全域 y 方向位移均设定为 0。为了计算方便，四边将均匀纯剪切的应力边界条件换为位移边界条件。上下两边 x 方向均匀位移分别为 $u_0 = \pm 15/\sqrt{2}\mu\text{m}$ ，左右两边 x 向位移按线性变化，椭圆夹杂处位移为 0。利用 ANSYS 软件进行计算，亦为三角形网格，网格数约为 60 000。各变量的无量纲化处理见表 2。

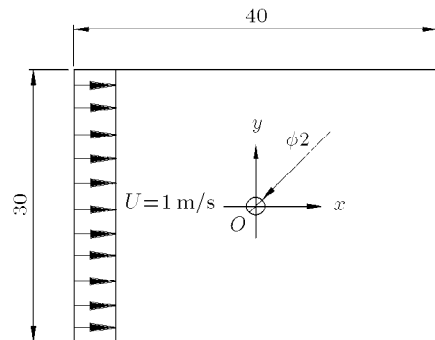


图 1 无黏圆柱扰流计算模型 (单位: m)

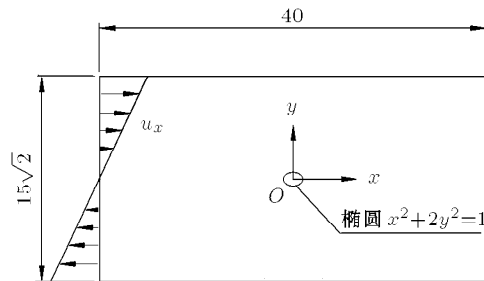


图 2 固体平面纯剪夹杂刚性椭圆计算模型 (单位: m)

表 2 无量纲量与计算取值

变量	无量纲化	计算取值
流体坐标	$X^* = x/l, Y^* = y/l$	$l = 1\text{ m}$
固体坐标	$X^* = x/l, Y^* = \sqrt{2}y/l$	
流体速度	$U_x^* = U_x/U, U_y^* = U_y/U$	$U = 1\text{ m/s}$
固体应力	$\sigma_{xy}^* = \sigma_{xy}L/Eu_0$	$E = 200\text{ GPa}$
	$\sigma_{xx}^* = \sigma_{xx}L/\sqrt{2}Eu_0$	$L = 15\sqrt{2}\text{ m}$
		$u_0 = 15/\sqrt{2}\mu\text{m}$

图 3 是无黏圆柱绕流的实验图像^[1](实际上是低雷诺数流动模拟获得)，而图 4 是 Fluent 计算所得无黏圆柱绕流的流线图谱，二者基本一致，但仔细观察会发现计算所得圆柱前后和上下流线并不完全对称，之后数值结果会更清楚显示这一点。但是 ANSYS 的比拟解能得到对称性很好的结果。

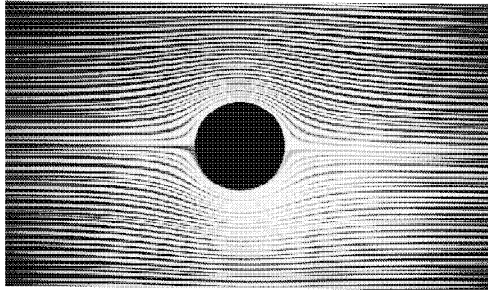


图 3 低雷诺数流动模拟的无黏圆柱扰流实验图像 [1]

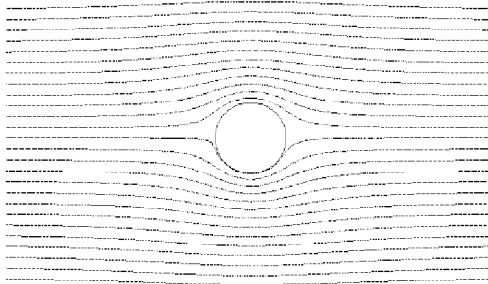
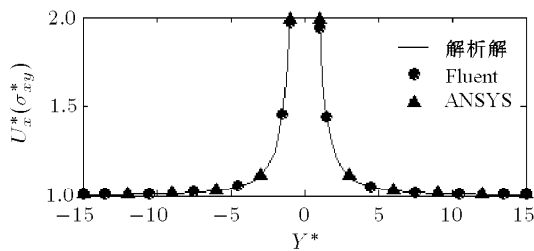
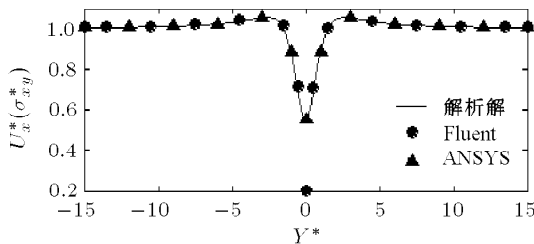


图 4 Fluent 计算所得无黏圆柱扰流流线图谱

计算表明，无量纲解析解、Fluent 数值解和 ANSYS 数值解在绝大部分计算区域符合得很好，图 5(a) 的比较显示了在 $X^* = 0$ 处三者结果吻合很好。本文的计算模型是有限域，为了考察边界的影响，改变 y 向尺寸，其余条件不变。从表 3 看出，随着 y 向尺寸的增大，数值解趋于无限域的解析解 (5)，由此验证了本文比拟关系的正确性。且在圆柱后 $Y^* = 0$ 附近的区域里，Fluent 的结果会出现明显偏离解析解的情况 (见图 5(b))；同时在表 4 列出的三者 $U_y^* (-\sigma_{xx}^*)$ 计算结果的比较中也可看到，尽管三者表现出良好的一致性，



(a) $X^* = 0$



(b) $X^* = 1.5$

图 5 解析解、Fluent 数值解和 ANSYS 数值解对比

表 3 $X^* = 0$ 处 Fluent 和 ANSYS 计算误差随区域 y 向尺寸的变化

Y 向尺寸 /m	Fluent/%	ANSYS/%
10	5.96	6.94
20	3.21	1.48
30	2.88	0.657

注：误差 = $\left| \frac{\text{无量纲计算值} - \text{无量纲解析解}}{\text{无量纲解析解}} \right| \times 100\%$

表 4 无量纲解析解 U_y^* ，Fluent 数值解 U_y^* 和 ANSYS 数值解 $-\sigma_{xx}^*$ 对比

$X^* = -1.5$			
Y^*	U_y^* (解析解)	U_y^* (Fluent)	$-\sigma_{xx}^*$ (ANSYS)
-5	-0.020 20	-0.021 27	-0.020 12
-1	-0.284 02	-0.291 08	-0.285 93
0	0.000 00	-0.009 23	-0.000 13
1	0.284 02	0.279 39	0.285 78
5	0.020 20	0.019 95	0.020 12
$X^* = 1.5$			
Y^*	U_y^* (解析解)	U_y^* (Fluent)	$-\sigma_{xx}^*$ (ANSYS)
-5	0.020 20	0.020 32	0.020 12
-1	0.284 02	0.288 68	0.285 91
0	0.000 00	0.008 10	0.000 00
1	-0.284 02	-0.278 83	-0.285 91
5	-0.020 20	-0.019 20	-0.020 12

但 Fluent 解的对称性不是很好。于是，得到了一个有趣的结论，对于无黏圆柱绕流问题，使用固体力学的 ANSYS 软件进行比拟计算，比直接使用流体力学的 Fluent 软件进行计算，可以得到更准确结果。

再做一个算例，将图 1 无黏流动计算模型的圆柱换成对角线为 2 m 的正方形柱，其余条件和比拟不变。遗憾的是，Fluent 的计算结果不收敛，计算的流场紊乱，见图 6。用半径 0.35 m 的圆弧将上下两角点圆弧化，扰流流场结果见图 7，它已经基本上符合解的对称性要求。可见图 6 紊乱是由于 Fluent 不能很好的处理角点问题所致。值得注意，无论正方形柱是否将角点圆弧化，ANSYS 都能得出符合对称关系且具有满意精度的结果。角点圆弧化 (ANSYS 模型为椭圆化) 的计算结果比较表明，Fluent 和 ANSYS 的结果在绝大部分计算区域中是相当一致的。表 5 给出了圆弧化正方形柱在 $Y^* = 0$ 处无量纲 Fluent 数值解和 ANSYS 数值解的对比。能看到在 $X^* = -1.5, -3, -5$ 处，Fluent 和 ANSYS 计算结果符合的很好，进一步说明了比拟关系的准确性。但在柱体后 $X^* = 1.5, 3, 5$ 处的 Fluent 计算结果要比柱体前相应位置的数值低很多，而 ANSYS 的计算结果夹杂前后保持着良好的一致性，更好地满足解的对称性要求。

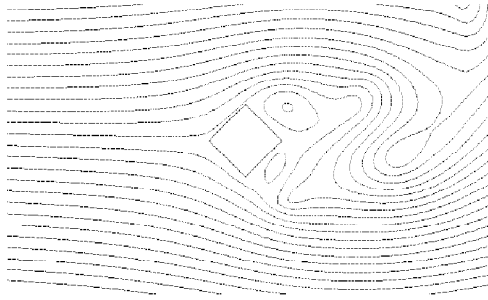


图6 Fluent 计算所得无黏正方形柱扰流流线图

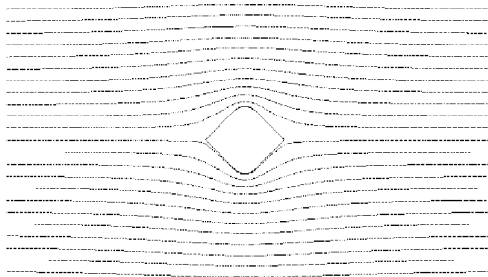


图7 Fluent 计算所得无黏圆弧形正方形柱扰流流线图

表5 $Y^* = 0$ 处无量纲 Fluent 数值解和 ANSYS 数值解对比

X^*	U_x^* (Fluent)	σ_{xy}^* (ANSYS)
-1.5	0.732 80	0.729 14
1.5	0.540 80	0.727 55
-3	0.934 30	0.933 94
3	0.828 95	0.933 90
-5	0.977 90	0.977 35
5	0.911 20	0.977 35

3 结 论

从理论上得出不可压平面无黏流动可用一个特殊的弹性力学平面问题比拟, 从而这类流动问题能采用固体力学软件 ANSYS 计算. 利用算例说明了比拟关系的正确性. 同时发现使用 ANSYS 计算平面无黏流动, 反而比直接使用流体计算软件 Fluent 得到的结果更准确, 这也从一个侧面说明了本文比拟关系的意义.

参 考 文 献

- 1 Milton Van Dyke. An Album of Fluid Motion. Stanford: The Parabolic Press, 1982

(责任编辑: 刘俊丽)

按位移推导平面轴对称问题的一般性解答¹⁾

刘章军²⁾ 叶 永 李建林

(三峡大学水利与环境学院, 湖北宜昌 443002)

摘要 根据平面轴对称问题的物理概念, 将平面轴对称问题分为轴对称应力问题和轴对称位移问题, 给出了这两种轴对称问题的基本方程, 并指出平面轴对称位移问题是平面轴对称应力问题的特例. 在此基础上, 分别按位移推导了平面轴对称应力问题和平面轴对称位移问题的一般性解答. 按位移推导平面轴对称问题, 可以考虑体力分量, 从而可避免按应力函数推导平面轴对称应力问题时不能考虑体力分量的局限性.

关键词 弹性力学, 平面轴对称问题, 一般性解答, 位移法

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2011)04-066-03

位移法和应力法是求解弹性力学问题的两种基本解法. 在现行的弹性力学教科书中^[1-2], 较多地突出了应力解法(按应力函数求解), 而对位移解法的介绍相对较少, 尤其在弹性

力学平面问题的求解中更是如此. 鉴于位移法在弹性力学求解中占有重要的地位, 笔者认为适当增加对位移法的介绍是有必要的. 例如, 在平面问题的极坐标解答中, 可以采用按位移来推导平面轴对称问题的一般性解答, 以便强调位移法在弹性力学平面问题求解中的重要性, 为后续变分法及有限单元法的讲授打下伏笔.

1 平面轴对称问题的物理概念

所谓轴对称, 是指物体的形状或某物理量是绕一轴对称的, 通过该对称轴的任何面都是对称面. 由于对称, 在对称面两边对应点的物理量^[3]: (1) 数值必须相同, 因此, 它只能是 ρ 的函数, 沿 φ 向不变; (2) 方向必须对称, 因此, 方向不对称的物理量不应存在.

在弹性力学平面问题中, 如果所有的应力分量都是轴对称的, 此时应变分量也是轴对称的, 而位移分量并非一定是轴对称的, 这种问题称为平面轴对称应力问题. 但在平面轴

2010-06-07 收到第 1 稿, 2011-07-03 收到修改稿.

1) 三峡大学 2010 年教学研究重点项目 (J2010003), 三峡大学弹性力学精品课程建设项目.

2) 刘章军, 男, 1973 年生, 博士, 副教授, 主要从事工程力学的教学与研究. E-mail: liuzhangjun73@yahoo.com.cn